Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 12.12.2013., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Rješiti matričnu jednačinu $CXA + XB = A$ ako su $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & -9 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 10 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 - \lambda(\lambda-1)\,x_4 &= 9 - \lambda \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + \lambda(\lambda-1)\,x_4 &= \lambda - 9 \end{aligned}$$

3. Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

(40%) (*a*) Dokazati da je i skup $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su $\vec{b}_1 = 14\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 32\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 16\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 36\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -41\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 93\vec{a}_3$.

(60%) (*b*) Odrediti koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ (drugim riječima napisati vektor $\vec{a}_2$ kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}'$).

4. Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y = \dfrac{3x^2 - 15x + 108}{x - 5}$.

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 12.12.2013., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Rješiti matričnu jednačinu $CXB + AX = C$ ako su $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 14x_2 - 10x_3 - \lambda(\lambda-3)\,x_4 &= -\lambda - 6 \\ 3x_1 - 14x_2 + 10x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + \lambda(\lambda-3)\,x_4 &= \lambda + 16 \end{aligned}$$

3. Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

(40%) (*a*) Dokazati da je i skup $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su $\vec{b}_1 = 22\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 39\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = -24\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 43\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_3$.

(60%) (*b*) Odrediti koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ (drugim riječima napisati vektor $\vec{a}_2$ kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}'$).

4. Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y = \dfrac{2x^2 - 6x + 2}{x - 3}$.

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 12.12.2013., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Rješiti matričnu jednačinu $AXC + XB = C$ ako su $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & -8 \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 - \lambda(\lambda+2)\, x_4 & = & 37 - \lambda \\ 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 & = & -28 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + \lambda(\lambda+2)\, x_4 & = & \lambda \end{array}$$

3. Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

(40%) (a) Dokazati da je i skup $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su $\vec{b}_1 = 15\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 33\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 3\vec{a}_1 + 6\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -29\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 63\vec{a}_3$.

(60%) (b) Odrediti koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ (drugim riječima napisati vektor $\vec{a}_2$ kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}'$).

4. Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y = \dfrac{4x^2 + 8x + 1}{x + 2}$.

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 12.12.2013., ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka

1. Rješiti matričnu jednačinu $AXC + XB = C$ ako su $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

2. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & -8 \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 - \lambda(\lambda+2)\, x_4 & = & 37 - \lambda \\ 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 & = & -28 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + \lambda(\lambda+2)\, x_4 & = & \lambda \end{array}$$

3. Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

(40%) (a) Dokazati da je i skup $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su $\vec{b}_1 = 15\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 33\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 3\vec{a}_1 + 6\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -29\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 63\vec{a}_3$.

(60%) (b) Odrediti koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ (drugim riječima napisati vektor $\vec{a}_2$ kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}'$).

4. Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $y = \dfrac{4x^2 + 8x + 1}{x + 2}$.

\# Riješiti matričnu jednačinu $CXA + XB = A$ ako sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & -9 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad i \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rj.-upute

$$CXA + XB = A \qquad / A^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$CXAA^{-1} + XBA^{-1} = AA^{-1}$$

$$CX + XBA^{-1} = I$$

Izračunajmo BA^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

Prema tome $CX + X\underbrace{BA^{-1}}_{3I} = I$

Kako je $X \cdot 3I = 3I \cdot X$ to je

$$(C + 3I)X = I \qquad / \cdot (C+3I)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (C+3I)^{-1}$$

$$C + 3I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

traženo rješenje

Riješiti matričnu jednačinu $CXB+AX=C$

ako su $A=\begin{bmatrix}0&-2&-4\\-4&-2&-6\\-2&0&-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&-4&4\\-1&1&-4\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-2&-1&-3\\-1&0&-1\end{bmatrix}$

Rj. -upute:

$CXB+AX=C \quad / \cdot C^{-1}$ sa lijeve strane

$C^{-1}CXB+C^{-1}AX=C^{-1}C$

$XB+C^{-1}AX=I$

Izračunajmo $C^{-1}A$.

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&4\\-1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=2I$$

$$\boxed{2I\cdot X=X\cdot 2I}$$

Prema tome

$$X B+\underbrace{C^{-1}A}_{2I}X=I$$

$$XB+X\cdot 2I=I$$

$$X(B+2I)=I \qquad /\cdot(B+2I)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X=\underbrace{(B+2I)^{-1}}_{D}$$

$$D=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&4\\-1&1&-2\end{bmatrix}$$

Primjetimo da su matrice C^{-1} i D podudarne. Prema tome

$$X=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-2&-1&-3\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$ traženo rješenje.

(#) Riješit matričnu jednačinu $AXC + XB = C$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad i \quad C = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rj. - upute:

$$AXC + XB = C \quad / C^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$AX\underbrace{CC^{-1}}_{=I} + XBC^{-1} = \underbrace{CC^{-1}}_{=I}$$

$$AX + XBC^{-1} = I$$

Izračunajmo BC^{-1}.

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$BC^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

Prema tome $AX + X\underbrace{BC^{-1}}_{2I} = I$

$$AX + 2X = I$$

$$(A + 2I)X = I \quad / (A+2I)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (A + 2I)^{-1}$$

$$D = A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ traženo rješenje}$$

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 \quad &= 10 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 - \lambda(\lambda-1)x_4 &= 9-\lambda \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \quad &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + \lambda(\lambda-1)x_4 &= \lambda - 9 \end{aligned}$$

Rj.

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 10 \\ -3 & 5 & -1 & -\lambda(\lambda-1) & 9-\lambda \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 18 \\ 2 & 3 & -4 & \lambda(\lambda-1) & \lambda-9 \end{array}\right] \overset{II_v + IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 10 \\ -1 & 8 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 18 \\ 2 & 3 & -4 & \lambda(\lambda-1) & \lambda-9 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda-1 \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda = 1 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3 < 4 \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}}$ sistem ima ∞ mnogo rješenja i jednu prom. uzimamo proizvoljno

rješenje sist. je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 6, s)$, $s \in \mathbb{R}$

2° $\lambda = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 3 \\ \operatorname{rang} \bar{A} = 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}}$ sistem nema rješ

3° $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq 0$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 4 \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}}$ sistem ima jedinstveno rješenje

rješ. sist. je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 6, \frac{1}{\lambda})$

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned}
x_1-4x_2+3x_3 &= 4\\
-3x_1+14x_2-10x_3-\lambda(\lambda-3)x_4 &= -\lambda-6\\
3x_1-14x_2+10x_3 &= 9\\
2x_1-3x_2+4x_3+\lambda(\lambda-3)x_4 &= \lambda+16
\end{aligned}$$

Rj.-upute:

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -4 & 3 & 0 & 4\\ -3 & 14 & -10 & -\lambda(\lambda-3) & -\lambda-6\\ 3 & -14 & 10 & 0 & 9\\ 2 & -3 & 4 & \lambda(\lambda-3) & \lambda+16\end{array}\right]\overset{II_v+IV_v}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -4 & 3 & 0 & 4\\ -1 & 11 & -6 & 0 & 10\\ 3 & -14 & 10 & 0 & 9\\ 2 & -3 & 4 & \lambda(\lambda-3) & \lambda+16\end{array}\right]$$

$$\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) & \lambda-3\end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda=3 \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A}=\operatorname{rang}A=3<4 \overset{\text{Kron.-Kap.}}{\Longrightarrow}$ sistem ima ∞ mnogo rješenja i jednu promjenj. uzim. proizvoljno

rješenje sistema je $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(3,5,7,s)$, $s\in\mathbb{R}$

2° $\lambda=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\operatorname{rang}A=3\\ \operatorname{rang}\bar{A}=4\end{array}\right\} \overset{\text{Kron.-Kap.}}{\Longrightarrow}$ sistem nema rješ.

3° $\lambda\neq-3$ i $\lambda\neq0$ $\quad \operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\bar{A}=4 \overset{\text{Kron.-Kap.}}{\Longrightarrow}$ sistem ima jedinstveno rješenje

rješ. sist. $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(3,5,7,\frac{1}{\lambda}\right)$

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -8\\
-4x_1 + 8x_2 + x_3 - \lambda(\lambda+2)x_4 &= 37-\lambda\\
2x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= -28\\
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + \lambda(\lambda+2)x_4 &= \lambda
\end{aligned}$$

Rj. - upute:

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 & -8\\ -4 & 8 & 1 & -\lambda(\lambda+2) & 37-\lambda\\ 2 & -9 & 5 & 0 & -28\\ 3 & 2 & -5 & \lambda(\lambda+2) & \lambda \end{array}\right] \overset{II_v+IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 & -8\\ -1 & 10 & -4 & 0 & 37\\ 2 & -9 & 5 & 0 & -28\\ 3 & 2 & -5 & \lambda(\lambda+2) & \lambda \end{array}\right]$$

$$\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+2) & \lambda+2 \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda=-2 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3 < 4 \overset{\text{Kron.-Kap.}}{\Longrightarrow}$ sistem ima ∞ mnogo rješenja i 1 param. u zim proizvoljno

rješenje sistema je $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,5,3,s)$, $s\in\mathbb{R}$

2° $\lambda = 0 \Rightarrow$ $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} \bar{A} = 4$ $\overset{\text{Kron.-Kap.}}{\Longrightarrow}$ sistem nema rješenje

3° $\lambda \neq -2$ i $\lambda \neq 0$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 4 \overset{\text{Kron.-Kap.}}{\Longrightarrow}$ sistem ima tačno jedno rješenje

rješ. sist. $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1, 5, 3, \frac{1}{\lambda})$

(#) Neka je $\mathcal{B}=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(a) Dokazati da je skup $\mathcal{B}'=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$, gdje su $\vec{b}_1 = 14\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 32\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 16\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 36\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -41\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 93\vec{a}_3$.

(b) Odredite koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

Rj.-upute:

(a) Da bi $\mathcal{B}'$ bio baza prostora potrebno je i dovoljno da je on linearno nezavisan skup

$$\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha(14\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 32\vec{a}_3) + \beta(16\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 36\vec{a}_3) + \gamma(-41\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 93\vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 14\alpha + 16\beta - 41\gamma &= 0 \\ -\alpha - \beta + 3\gamma &= 0 \\ 32\alpha + 36\beta - 93\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} 14 & 16 & -41 \\ -1 & -1 & 3 \\ 32 & 36 & -93 \end{vmatrix} = \ldots = 2 \neq 0$$

dati sistem ima jedinstven yerje

$\Rightarrow$ skup $\mathcal{B}'$ je linearno nezavisan $\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ je također baza prostora $\mathbb{R}^3$

(b) Trebamo odrediti brojeve α, β i γ takve da

$$\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{a}_2$$

Ovo se svodi na sistem

$$\begin{aligned} 14\alpha + 16\beta - 41\gamma &= 0 \\ -\alpha - \beta + 3\gamma &= 1 \\ 32\alpha + 36\beta - 93\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem možemo rješiti npr. Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 16 & -41 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 32 & 36 & -93 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Neka je $\mathcal{B}=\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\}$ jedna baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(a) Dokazati da je skup $\mathcal{B}'=\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$, gdje su $\vec{b_1}=22\vec{a_1}+\vec{a_2}+39\vec{a_3}$, $\vec{b_2}=-24\vec{a_1}-\vec{a_2}-43\vec{a_3}$ i $\vec{b_3}=-2\vec{a_1}-3\vec{a_3}$.

(b) Odrediti koordinate vektora $\vec{a_2}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ (drugim riječima izraziti vektor $\vec{a_2}$ preko vektora iz baze $\mathcal{B}'$)

Rj. -upute:

(a) Da bi skup $\mathcal{B}'$ bio baza potrebno je i dovoljno da je on linearno nezavisan skup

$$\alpha\vec{b_1}+\beta\vec{b_2}+\gamma\vec{b_3}=\vec{0}$$

$$\alpha(22\vec{a_1}+\vec{a_2}+39\vec{a_3})+\beta(-24\vec{a_1}-\vec{a_2}-43\vec{a_3})+\gamma(-2\vec{a_1}-3\vec{a_3})=\vec{0}$$

$$\begin{aligned} 22\alpha-24\beta-2\gamma&=0\\ \alpha-\beta&=0\\ 39\alpha-43\beta-3\gamma&=0\end{aligned}\qquad D=\begin{vmatrix}22&-24&-2\\1&-1&0\\39&-43&-3\end{vmatrix}=\ldots=2\neq 0$$

$\Downarrow$ dati sistem ima jedinstveno rješenje

$\Rightarrow$ skup $\mathcal{B}'$ je linearno nezavisan $\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ je također baza prostora $\mathbb{R}^3$

(b) Trebamo odrediti nepoznate skalare α,β i γ takve da

$$\alpha\vec{b_1}+\beta\vec{b_2}+\gamma\vec{b_3}=\vec{a_2}$$

Na osnovu dijela pod (a) nije teško vidjeti da se ovo svodi na sistem

$$\begin{aligned} 22\alpha-24\beta-2\gamma&=0\\ \alpha-\beta&=1\\ 39\alpha-43\beta-3\gamma&=0\end{aligned}$$

Sistem možemo riješiti npr. Kronecker-Kapelijevom metodom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}22&-24&-2&0\\1&-1&0&1\\39&-43&-3&0\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&7\\0&1&0&6\\0&0&1&5\end{array}\right]$$

Koordinate vektora $\vec{a_2}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.

(#) Neka je $\mathcal{B}=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(a) Dokazati da je skup $\mathcal{B}'=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ također baza prostora $\mathbb{R}^3$, gdje su $\vec{b}_1 = 15\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 33\vec{a}_3$, $\vec{b}_2 = 3\vec{a}_1 + 6\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3 = -29\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 63\vec{a}_3$.

(b) Odrediti koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$.

Rj.-upute:

(a) Pokažimo da je skup $\mathcal{B}'$ linearno nezavisan skup tj. da je jedino rješenje sistema $\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{0}$ (po nepoznatim α, β i γ) trivijalno rješenje

$$\alpha(15\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 33\vec{a}_3) + \beta(3\vec{a}_1 + 6\vec{a}_3) + \gamma(-29\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 63\vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 15\alpha + 3\beta - 29\gamma &= 0 \\ -\alpha \qquad\quad + 2\gamma &= 0 \\ 33\alpha + 6\beta - 63\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} 15 & 3 & -29 \\ -1 & 0 & 2 \\ 33 & 6 & -63 \end{vmatrix} = \dots = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ skup $\mathcal{B}'$ je linearno nezavisan, a kako on ima tri elementa to generiše prostor $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ je baza prostora $\mathbb{R}^3$

(b) Odredimo skalare α, β i γ t.d. $\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{a}_2$

Iz (a) vidimo da se ovo svodi na sistem

$$\begin{aligned} 15\alpha + 3\beta - 29\gamma &= 0 \\ -\alpha \qquad\quad + 2\gamma &= 1 \\ 33\alpha + 6\beta - 63\gamma &= 0 \end{aligned}$$

ovaj sistem možemo riješiti npr. Kronecker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 15 & 3 & -29 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 33 & 6 & -63 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Koordinate vektora $\vec{a}_2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ⓣ Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je

$$y = \frac{3x^2 - 15x + 108}{x - 5}$$

Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$x - 5 \neq 0$

$x \neq 5$

$\mathcal{D}: x \in (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

INTERVALI RASTA I OPADANJA

$$y' = \frac{3(x+1)(x-11)}{(x-5)^2} = \frac{3x^2 - 30x - 33}{(x-5)^2}$$

$-1 \quad 5 \quad 11$ ← prekidi y + nule y'

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, 11)$	$(11, +\infty)$
y'	+	−	−	+
y	↗	↘	↘	↗
	MAX		MIN	

tabela rasta i opadanja

$f(-1) = -21$; $\quad f(11) = 51$

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja vidimo da f-ja ima dva ekstrema i to

$MAX(-1; -21)$ i $MIN(11; 51)$

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$y'' = \frac{216}{(x-5)^3}$$

$y'' \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$ f-ja nema prevojnih tački

$y''(-1) = -1 < 0$

$y''(11) = 1 > 0$

5 ← prekidi y + nule y''

x	$(-\infty, 5)$	$(5, +\infty)$
y''	−	+
y	⌒	◡

tabela konveksnosti i konkavnosti

(#) Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je

$$y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x - 3}$$

Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$\mathcal{D}: x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

INTERVALI RASTA I OPADANJA

$$y' = \frac{2(x-2)(x-4)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 16}{(x-3)^2}$$

2 3 4 ← prekidi y + nule y'

x	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
y'	+	−	−	+
y	↗	↘	↘	↗
		MAX		MIN

tabela rasta i opadanja

$f(2) = \frac{8 - 12 + 2}{-1} = 2$

$f(4) = 10$

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja vidimo da f-ja ima dva ekstrema i to

MAX$(2; 2)$ i MIN$(4; 10)$

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$y'' = \frac{4}{(x-3)^3}$$

$y'' \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$ f-ja nema prevojnih tački

$$\boxed{\begin{array}{l} y''(2) = -4 < 0 \\ y''(4) = 4 > 0 \end{array}}$$

3 ← prekidi y + nule y''

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
y''	−	+
y	∩	∪

tabela konveksnosti i konkavnosti

Odrediti definiciono područje, ekstreme, prevojne tačke, te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je

$$y = \frac{4x^2+8x+1}{x+2}$$

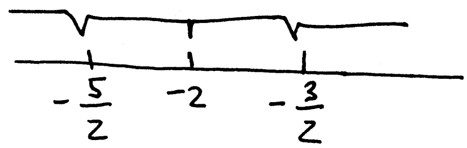
Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$$x+2 \neq 0$$
$$x \neq -2$$
$$\mathcal{D}: x \in (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$$

INTERVALI RASTA I OPADANJA

$$y' = \frac{(2x+5)(2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+16x+15}{(x+2)^2}$$



← prekidi y + nule y'

x	$(-\infty,-\frac{5}{2})$	$(-\frac{5}{2},-2)$	$(-2,-\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2},+\infty)$
y'	+	—	—	+
y	↗	↘	↘	↗

MAX

tabela rasta i opadanja

MIN

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja vidimo da f-ja ima dva ekstrema i to

$MAX(-\frac{5}{2}; -12)$ i $MIN(-\frac{3}{4}; -4)$

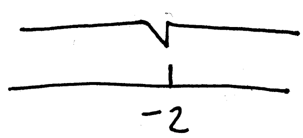
$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = -12; \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -4$$

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$y'' = \frac{2}{(x+2)^3}$$

$y'' \neq 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow$ f-ja nema prevojnih tački

$$y''\left(-\frac{5}{2}\right) = -16 < 0$$
$$y''\left(-\frac{3}{2}\right) = 16 > 0$$



← prekidi y + nule y''

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
y''	—	+
y	∩	∪

tabela konveksnosti i konkavnosti